Formule d'Euler-Maclaurin :

I Le développement

Le but de ce développement est de démontrer la formule d'Euler-Maclaurin et d'en donner une application en donnant un développement asymptotique de la série harmonique à la précision $\frac{1}{n^r}$.

Proposition 1 : Formule d'Euler-Maclaurin [Gourdon, p.321] :
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m < n)$ et $f : [m; n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
On a la relation :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h!}\left(f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m)\right) + R_r$$

avec $R_r = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_m^n \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t$.

Preuve :
Soient $m, n \in \mathbb{Z}$ $(m < n)$ et $f : [m; n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
Montrons par récurrence sur $r \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$\mathcal{H}_1$: "La formule est vraie pour toute fonction $f : [m; n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$"

Initialisation pour $r = 1$:
Soit $f : [m; n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Compte-tenu du fait que $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$ sur $]0; 1[$, une intégration par partie donne pour tout entier $k \in [\![m; n-1]\!]$:

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \widetilde{B_1}(t) f'(t)\mathrm{d}t &= \left[\widetilde{B_1}(t) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right) f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(k+1)+f(k)}{2} - \int_k^{k+1} f(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puis en sommant cette relation pour k allant de m à $n-1$, on obtient :

$$\int_m^n \widetilde{B_1}(t) f'(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=m}^{n} f(k) - \frac{f(m)+f(n)}{2} - \int_m^n f(t)\mathrm{d}t$$

La propriété est donc vraie au rang $r = 1$ (car la somme de la formule est égale à 0 ici) et elle est ainsi bien initialisée.

Hérédité :
On suppose la propriété $\mathcal{H}_{r-1}$ vraie pour un certain $r \geq 2$.
Soit $f : [m; n] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^r$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = \int_m^n f(t)\mathrm{d}t + \frac{f(m)+f(n)}{2} + \sum_{h=2}^{r-1} \frac{b_h}{h!}\left(f^{(h-1)}(n) - f^{(h-1)}(m)\right) + R_{r-1}$$

Il suffit donc de montrer que $R_{r-1} = \frac{b_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\right) + R_r$. Or, toujours en intégrant par parties pour $k \in [\![m; n-1]\!]$, on a d'après les propriétés des polynômes de Bernoulli :

$$\begin{aligned}\int_k^{k+1} \widetilde{B_r}(t) f^{(r)}(t)\mathrm{d}t &= \left[\widetilde{B_r}(t) f^{(r-1)}(t)\right]_k^{k+1} - r\int_k^{k+1} \widetilde{B_{r-1}}(t) f^{(r-1)}(t)\mathrm{d}t \\ &= b_r\left(f^{(r-1)}(k+1) - f^{(r-1)}(k)\right) - r\int_k^{k+1} \widetilde{B_{r-1}}(t) f^{(r-1)}(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

Puis en sommant cette relation pour k allant de m à $n-1$ et en multipliant par $\frac{(-1)^{r+1}}{r!}$, on obtient :

$$R_r = \frac{(-1)^{r+1} b_r}{r!}\left(f^{(r-1)}(n) - f^{(r-1)}(m)\right) + R_{r-1}$$

En utilisant le fait que l'on a toujours $(-1)^r b_r = b_r$ (puisque $b_r = 0$ si r est impair et $(-1)^r = 1$ si r est pair), on obtient $\mathcal{H}_r$.
La propriété est donc vraie au rang r, elle est donc héréditaire.

Finalement, on a démontré par récurrence la formule d'Euler-Maclaurin.

■

Exemple 2 : [Gourdon, p.321]
Lorsque n tend vers $+\infty$, on a :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r} \frac{(-1)^{r-1} b_h}{h n^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Preuve :
Soir $r \in \mathbb{N}^*$.
On applique la formule d'Euler-Maclaurin à la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ entre 1 et n et puisque f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $f^{(h)}(t) = \frac{(-1)^h h!}{t^{h+1}}$, on a :

$$\begin{aligned}
H_n &= \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \sum_{h=2}^{r} \frac{b_h}{h}\left(\frac{(-1)^{h-1}}{n^h} - (-1)^{h-1}\right) \\
&\quad + \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\int_1^n \widetilde{B_r}(t)\frac{(-1)^r r!}{t^{r+1}}\mathrm{d}t \\
&= \ln(n) + \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \sum_{h=2}^{r}\frac{(-1)^h b_h}{h} - \int_1^{+\infty}\widetilde{B_r}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}}\right)}_{\gamma_r} + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r}(-1)^{h-1}\frac{b_h}{hn^h} + \varepsilon_r(n)
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_r(n) = \int_n^{+\infty}\widetilde{B_r}(t)\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}}$ qui vérifie :

$$|\varepsilon_r(n)| \leq \left\|\widetilde{B_r}\right\|_\infty \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^{r+1}} = \frac{\left\|\widetilde{B_r}\right\|_\infty}{rn^r} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

On a donc :

$$H_n = \ln(n) + \gamma_r + \frac{1}{2n} + \sum_{h=2}^{r}\frac{(-1)^{r-1}b_h}{hn^h} + O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Et enfin la constante γ_r est indépendante de r car la formule précédente donne $\gamma_r = \lim_{n\to+\infty} H_n - \ln(n)$ $(= \gamma)$.

On a donc démontré le résultat voulu.

■

II Remarques sur le développement

II.1 Résultat(s) utilisé(s)

Dans ce développement on a utilisé les nombres et polynômes de Bernoulli dont on rappelle la définition :

On définit la fonction :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{(n+1)!} \end{array}\right.$$

qui vérifie pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$.
Puisque $f(0) = 1 \neq 0$, on sait que la fonction $\frac{1}{f}$ est développable en série entière sur un disque épointé $\mathcal{D}(0,r)$ pour un certain $r > 0$. Ainsi, il existe une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$$

Cela nous conduit à la définition suivante :

Définition 3 : Nombres de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{z}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **nombres de Bernoulli** telle que :

$$\forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b_n}{n!}z^n$$

Par produit de Cauchy, on a également la définition suivante :

Définition 4 : Polynômes de Bernoulli [Gourdon, p.319] :
La fonction $z \longmapsto \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ est développable en série entière sur un disque $\mathcal{D}(0,r)$ épointé pour un certain $r > 0$.
On appelle $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des **polynômes de Bernoulli** telle que :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ \forall z \in \mathcal{D}(0,r)\backslash\{0\},\ \frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n$$

Ces nombres et polynômes vérifient les propriétés suivantes (dont les démonstrations découlent des propriétés de la fonction $(z,x) \longmapsto \frac{ze^{xz}}{e^z-1}$ et du fait que l'on peut dériver terme à terme une série entière sur son disque de convergence) :

Proposition 5 : [Gourdon, p.319]
On a les propriétés suivantes :
$*$ $\forall n \in \mathbb{N},\ B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$.
$*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^1 B_n(t)\mathrm{d}t = 0$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ B_n' = nB_{n-1}$.
$*$ $\forall n \geq 2,\ B_n(0) = B_n(1)$. $*$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_{2n+1} = 0$.

De plus, par produit de Cauchy et unicité du développement en série entière, on a également le résultat suivant :

Proposition 6 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{C},\ B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} x^k,\ b_n \in \mathbb{Q}$$

En particulier, on a $b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}$, $b_2 = \frac{1}{6}$, $b_4 = -\frac{1}{30}$ et $b_6 = \frac{1}{42}$.

Remarque 7 :
On remarque alors que le calcul des premiers nombres de Bernoulli donne :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12}n^2 + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{252n^6} + \frac{1}{240n^8} - \frac{1}{132n^{10}} + O\left(\frac{1}{n^{13}}\right)$$

Finalement, on a utilisé les applications $\widetilde{B_n} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 1-périodique, qui coïncide avec B_n sur $[0;1[$.

II.2 Pour aller plus loin...

On peut également appliquer cette formule pour obtenir un raffinement de la formule de Stirling. On fixe en entier naturel d supérieur ou égal à 2.

En s'inspirant de la méthode pour obtenir le développement asymptotique de la série harmonique, on obtient l'existence d'une constante C_d indépendante de n telle que :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln(k) = n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + C_d + \sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k(k-1)n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^d}\right)$$

Par la formule de Stirling, on a $C_d = \ln(2\pi)$ et donc :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\sum_{k=2}^{d} \frac{(-1)^k b_k}{k(k-1)n^{k-1}} + O\left(\frac{1}{n^d}\right)}$$

Et donc en particulier :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

On peut également revenir sur les fonctions $\widetilde{B_k}$ et on peut montrer (par récurrence et grâce à la théorie des séries de Fourier) la propriété suivante :

Proposition 8 : [Gourdon, p.319]
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\frac{\widetilde{B_{2k}}(x)}{(2k)!} = 2 \times (-1)^{k+1} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k}} \text{ et } \frac{\widetilde{B_{2k-1}}(x)}{(2k-1)!} = 2 \times (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nx)}{(2n\pi)^{2k-1}}$$

Remarque 9 : [Gourdon, p.319]
En particulier pour $x = 0$ dans la formule précédente, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ que $\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k+1} b_{2k}}{2(2k)!}(2\pi)^{2k}$. Ainsi, on retrouve le fait que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ et $\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$.
De plus, on a l'équivalent :

$$b_{2k} \underset{k\to+\infty}{\sim} (-1)^{k+1}\frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \underset{k\to+\infty}{\sim} (-1)^{k+1}\frac{4\sqrt{\pi}k^{\frac{2k+1}{2}}}{(e\pi)^{2k}}$$

Remarque 10 : [Gourdon, p.319]
$*$ On ne connaît presque rien des $\zeta(2k+1)$...
Le seul résultat connu est que $\zeta(3) \approx 1,202$ est irrationnel et on l'appelle **constante d'Apéry**.
$*$ Les nombres de Bernoulli jouent un rôle important et assez mystérieux dans des parties aussi diverses des mathématiques que l'analyse, la théorie des nombres et la topologie différentielle. Citons par exemple l'étonnant théorème de Von Staudt : Si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, s_n désigne la somme des inverses des nombres premiers p tels que $p-1$ divise $2n$, alors $s_n + b_{2n}$ est un entier.

II.3 Recasages

Recasages : 223 - 224 - 230.

III Bibliographie

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.